Clase 12: Continuación.

Peter Hummelgens

16 de diciembre de 2006

1. Problemas de autovectores y autofunciones.

Para completar la discusión de la clase anterior nos falta explicar como se obtuvieron los autovalores autofunciones del PAA que surgió de la separación de variables. Cambiando la notación este PAA es

(I)

$$u^{''}(x) + \lambda u(x) = 0; \;\; 0 \leq x \leq \ell, \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \;\; u(\ell) = 0. \tag{2}$$

Como el parámetro λ es real, hay 3 posibilidades: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ o $\lambda > 0$.

Caso $\lambda < 0$: podemos entonces escribir $\lambda = -\alpha^2$ para cierto $\alpha > 0$ y (1) es en este caso

$$u^{''}(x) - \alpha^2 u(x) = 0,$$

con solución general (cultura general)

$$u(x) = A\cosh(\alpha x) + B\,\mathrm{senh}(\alpha x)$$

y de (2) entonces $A = 0$ y luego $B\,\mathrm{senh}(\alpha\ell) = 0 \Longrightarrow B = 0$ (porque $\mathrm{senh}\,\xi \neq 0$ si $\xi \neq 0$). Pero entonces $A = 0$, $B = 0 \Longrightarrow u(x)$ es la solución trivial $u(x) = 0$ en $0 \leq x \leq \ell$, es decir para $\lambda < 0$ no hay soluciones no triviales, o en otras palabras: no hay autovalores $\lambda < 0$.

Caso $\lambda = 0$: Entonces (1) se reduce a $u''(x) = 0$ con solución general $u(x) = Ax + B$, y luego con (2) $B = 0$ y luego $A\ell = 0$ $\ell \neq 0 \Longrightarrow A = 0$. Nuevamente no hay solución no trivial, es decir, $\lambda = 0$ no es un autovalor.

Caso $\lambda > 0$: podemos entonces escribir $\lambda = \alpha^2$ para cierto $\alpha > 0$, y (1) da

$$u''(x) + \alpha^2 u(x) = 0,$$

con solución general (cultura general)

$$u(x) = A\cos(\alpha x) + B\,\mathrm{sen}(\alpha x),$$

y luego (2) da $A = 0$ y luego $B\,\mathrm{sen}(\alpha\ell) = 0 \Longrightarrow B = 0$ o $\mathrm{sen}(\alpha\ell) = 0$. Como descartamos $B = 0$ porque estamos buscando soluciones no triviales (ya tenemos $A = 0$,) queda

$$\mathrm{sen}(\alpha\ell) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha\ell = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Pero $\alpha, \ell > 0 \Longrightarrow n\pi > 0 \Longrightarrow n > 0$ y queda únicamente $n = 1, 2, 3, \cdots$, es decir, obtenemos $\alpha_n = \frac{n\pi}{\ell} \Longrightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ son los autovalores del PAA (1),(2). Con $A = 0$ arriba, autofunciones correspondientes son

$$u_n(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right); 0 \leq n \leq \ell \;\; (n - 1, 2, 3, \cdots).$$

Queda completamente resuelto el PAA (I). Ya vimos que las $u_n(x)$ forman un sistema ortogonal en $[0;\ell]$.

Consideremos ahora el PAA

(II)

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0; \quad 0 \leq x \leq \ell \tag{3}$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(\ell) = 0. \tag{4}$$

Caso $\lambda < 0$: $\lambda = -\alpha^2 (\alpha > 0) \Longrightarrow$ (como antes) $u(x) = A\cosh(\alpha x) + B\,\mathrm{senh}(\alpha x)$

$$\left.\begin{array}{rcl} \Longrightarrow u'(x) & = & \alpha A\,\mathrm{senh}(\alpha x) + \alpha B\cosh(\alpha x) \\ u'(0) & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \alpha B = 0, \quad \alpha \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad B = 0.$$

$$\left.\begin{array}{r} \Longrightarrow \quad u(x) = A\cosh(\alpha x), \;\; u'(x) = \alpha A\,\mathrm{senh}(\alpha x) \\ u'(\ell) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$\Longrightarrow$ hay para $\lambda < 0$ únicamente la solución trivial $\Longrightarrow$ no hay autovalores $\lambda < 0$

Caso $\lambda = 0$:

$$\Longrightarrow \quad u(x) = Ax + B \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{r} u'(x) = A \\ u'(0) = 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad A = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{r} u(x) = B, \quad u'(x) = 0 \\ u'(\ell) = 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad B \text{ puede ser arbitrario ; } B \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ es un autovalor y } u_0(x) = 1 \text{ una autofunción correspondiente.} \tag{5}$$

Esto se ve directamente de (3), (4) también.

Caso $\lambda > 0$: $\lambda = \alpha^2$ $(\alpha > 0) \Longrightarrow u(x) = A\cos(\alpha x) + B\,\mathrm{sen}(\alpha x)$

$$\left.\begin{array}{rcl} \Longrightarrow u'(x) & = & -\alpha A\,\mathrm{sen}(\alpha x) + \alpha B\cos(\alpha x) \\ u'(0) & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \alpha B = 0, \quad \alpha \neq 0 \Longrightarrow B = 0$$

$$\Longrightarrow u(x) = A\cos(\alpha x), \quad \left.\begin{array}{rcl} u'(x) & = & -\alpha A\,\mathrm{sen}(\alpha x) \\ u'(\ell) & = & 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} \Longrightarrow \alpha A\,\mathrm{sen}(\alpha \ell) = 0 \\ \alpha \neq 0 \quad \text{y exigir } A \neq 0 \end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow \mathrm{sen}(\alpha\ell) = 0 \Rightarrow$ (como antes) $\alpha_n = \frac{n\pi}{\ell}$, $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$ con $n = 1, 2, 3, \cdots$

$$\left.\begin{array}{rcl} \Longrightarrow \text{ autovalores } \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2};\ \ n & = & 1, 2, 3, \cdots \\ \text{autofunciones correspondientes } u_n(x) & = & \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \end{array}\right\} \tag{6}$$

Podemos tomar (5), (6) juntos, concluyendo:

$$\left.\begin{array}{r} \text{autovalores } \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}; \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \\ u_0(x) = 1, \quad u_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right). \end{array}\right\} \tag{7}$$

Queda resuelta el PAA (II). Ejercicio recomendado: verifique que $u_0(x) = 1$, $u_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ forman un sistema ortogonal, es decir, verificar que

$$\int_0^\ell 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = \int_0^\ell \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = 0; \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

$$\int_0^\ell \cos\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = 0, \quad \text{si } m \neq n$$

Verifique además que

$$\left.\begin{array}{rcl}\int\limits_0^\ell \cos^2\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx &=& \frac{\ell}{2};\ \ n=1,2,3,\cdots \\ \int\limits_0^\ell 1^2 dx &=& \ell\end{array}\right\}$$

Sea ahora el PAA

(III)

$$u''(x)+\lambda u(x)=0;\ \ -\ell\leq x\leq \ell \tag{8}$$

$$u(-\ell)=u(\ell),\ \ u'(-\ell)=u'(\ell). \tag{9}$$

<u>Caso $\lambda<0$</u>:

$$\lambda=-\alpha^2(\alpha>0)\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl}u(x) &=& A\cosh(\alpha x)+B\,\mathrm{senh}(\alpha x)\\ u(-\ell) &=& u(\ell)\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\ \ A\cosh(\alpha\ell)-B\,\mathrm{senh}(\alpha\ell)=A\cosh(\alpha\ell)+B\,\mathrm{senh}(\alpha\ell)$$

$$\Longrightarrow\ \ 2B\,\mathrm{senh}(\alpha\ell)=0\Longrightarrow B=0\Longrightarrow\ \ u(x)=A\cosh(\alpha x)\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl}u'(x) &=& \alpha A\,\mathrm{senh}(\alpha x)\\ u'(-\ell) &=& u'(\ell)\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\ \ -\alpha A\,\mathrm{senh}(\alpha\ell)=\alpha A\,\mathrm{senh}(\alpha\ell)\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl}-\alpha A &=& \alpha A\\ \alpha &\neq& 0\end{array}\right\}\Longrightarrow\ \ -A=A\ \ \Longrightarrow\ \ A=0$$

$\Longrightarrow$ no hay autovalores $\lambda<0$

<u>Caso $\lambda=0$</u>:

$$\left.\begin{array}{rcl}u(x) &=& Ax+B\\ u(\ell) &=& u(-\ell)\end{array}\right\}\Rightarrow -A\ell+B=A\ell+B\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl}-A\ell &=& Al\\ \ell &\neq& 0\end{array}\right\}\Longrightarrow\ \ -A=A\ \ \Longrightarrow\ \ A=0$$

$$\Longrightarrow\ \left.\begin{array}{rcl}u'(x) &=& B\\ u'(-\ell) &=& u'(\ell)\end{array}\right\}\text{ se cumple para todo } B$$

$$\Longrightarrow\ \ \lambda=0\ \text{ es autovalor con autofunción }\ u_0(x)=1. \tag{10}$$

<u>Caso $\lambda>0$</u>:

$$\lambda=\alpha^2(\alpha>0)\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl}u(x) &=& A\cos(\alpha x)+B\,\mathrm{sen}(\alpha x)\\ u(-\ell) &=& u(\ell)\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\ \ A\cos(\alpha\ell)-B\,\mathrm{sen}(\alpha\ell)=A\cos(\alpha\ell)+B\,\mathrm{sen}(\alpha\ell)$$

$$\Longrightarrow \quad 2B\,\text{sen}(\alpha\ell) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad \text{o} \quad \text{sen}(\alpha\ell) = 0,$$

Si $B = 0$, entonces

$$\left.\begin{array}{c} u(x) = A\cos(\alpha x) \Longrightarrow \quad u'(x) = -\alpha A\,\text{sen}(\alpha x) \\ u'(-\ell) = u'(\ell) \end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow \alpha A\,\text{sen}(\alpha\ell) = \alpha A\,\text{sen}(\alpha\ell)$, $\alpha \neq 0$ y <u>exigir</u> $A \neq 0 \Longrightarrow \text{sen}(\alpha\ell) = \text{sen}(\alpha\ell) \Longrightarrow$ no da restricción.

Si $\text{sen}(\alpha\ell) = 0$, entonces $\alpha\ell = n\pi \Longrightarrow \alpha = \frac{n\pi}{\ell}$; $\ n = 1, 2, 3, \cdots$ (recuerde que $\alpha > 0$)

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow \quad \text{autovalores } \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{\ell^2};\ n = 0, 1, 2, 3, \cdots. \\ \text{con autofunciones correspondientes } \ \text{sen}\left(\dfrac{n\pi}{\ell}x\right) \ \text{ y } \ \cos\left(\dfrac{n\pi}{\ell}x\right) \end{array}\right\} \tag{11}$$

Tomando (10), (11) juntos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{autovalores } \ \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{\ell^2}; \ \ n = 0, 1, 2, 3, \cdots \\ \text{con autofunciones } \ u_0(x) = 1, \ \ \phi_n(x) = \cos\left(\dfrac{n\pi}{\ell}x\right), \ \ \psi_n(x) = \text{sen}\left(\dfrac{n\pi}{\ell}x\right) \end{array}\right\} \tag{12}$$

Queda resuelto el PAA (III). Ejercicio recomendado: Verifique que

$$\left\{1,\, \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}n\right),\ \text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}n\right) \mid n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

es un sistema ortogonal en $[-\ell; \ell]$. El PAA (III) es diferente de los PAA (I), (II) en que en el problema (III) tenemos para $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} (n \neq 0)$ <u>dos</u> autofunciones correspondientes que son independientes. Cualquier <u>combinación lineal</u> de autofunciones correspondientes a un autovalor <u>es también autofunción</u> correspondiente al <u>mismo</u> autovalor. Por lo tanto las funciones

$$\begin{aligned} e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} &= \phi_n(x) + i\psi_n(x) \\ e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x} &= \phi_n(x) - i\psi_n(x) \end{aligned}$$

Son autofunciones correspondientes a λ_n (para $n = 0$ resulta $u_0(x) = 1$ en ambos casos) Tenemos ahora un sistema de autofunciones <u>complejas</u>

$$\left\{1, e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} \mid n = \pm 1,\ \pm 2, \right\} \tag{13}$$

para el PAA (III) (los autovalores son los mismos). Veamos que es un sistema ortogonal en $[-\ell;\ell]$, donde para un sistema de funciones $\varphi_n(x)$ complejas en un intervalo $a \leq x \leq b$ entendemos que ortogonalidad significa

$$\int_a^b \varphi_m(x)\overline{\varphi_n(x)}dx = 0 \ \text{ si } \ m \neq n \tag{14}$$

donde $\overline{\varphi_n(x)}$ es la conjugada compleja de $\varphi_n(x)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\ell}^{\ell} e^{i\frac{m\pi}{\ell}x}\overline{e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}}dx &= \int_{-\ell}^{\ell} e^{i\frac{m\pi}{\ell}x}e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}dx \\
&= \frac{1}{i\frac{\pi}{\ell}(m-n)}\left[e^{i\pi(m-n)} - e^{-i\pi(m-n)}\right] \\
&= \frac{2}{i\frac{\pi}{\ell}(m-n)}\,\mathrm{sen}[(m-n)\pi] \\
&= 0
\end{aligned}$$

(aplicamos la fórmula de Euler), lo que teníamos que demostrar.

Más ejemplos de PAA se presentan en la guía de ejercicios resueltos del profesor P-F Hummelgens. Un fenómeno general en estos ejemplos es que los PAA producen sistemas ortogonales de autofunciones (que además son completos en un sentido que aclararemos más adelante). En lo que sigue formalizaremos los conceptos de sistemas ortogonales, series de Fourier, $\cdots$ etc, de un punto de vista más abstracto.